

Fortgeschrittenes physikalisches Praktikum
Versuch: Brownsche Bewegung

Wupp i.O.

Aufgabenstellung:

In diesem Experiment sollte das Diffusionsverhalten makroskopischer Latexteilchen in einer Suspension untersucht werden.

Konkret sind folgende Arbeitsschritte gefordert:

1. Messung der Vergrößerung des Mikroskops
2. Präparation eines Objektträgers mit einer Latex-Suspension
3. Aufnahme der Bewegung von 10 Latex-Kügelchen mittels je 10 Messpunkten
4. Bestimmung des mittleren Radius der Kügelchen anhand des theoretischen und experimentell bestimmten Diffusionskoeffizienten

Messaufbau:

Verwendet wurde ein Mikroskop der Firma Carl-Zeiss, an das eine Kamera angeschlossen wurde. Zur Aufnahme der Messpunkte haben wir Millimeterraster-Folie auf den angeschlossenen Monitor fixiert.

Zur Beobachtung wurde ein Dunkelfeldkondensor verwendet, der das Primärlicht vollständig ausblendet und die Latexkügelchen durch ihre von der Flüssigkeit verschiedenen Brechzahlen sichtbar macht. Außerdem wurde die Auflösung verbessert, indem ein Immersionsobjektiv verwendet wurde.

Die vorbereitete Latex-Suspension (Lösung 2) wurde in einen Fettring auf einem Objektträger getropft und anschließend vorsichtig ein Deckplättchen aufgedrückt. Dabei haben wir darauf geachtet, dass keine Luftbläschen eingeschlossen wurden.

Formeln:

Diffusionskoeffizient:
$$D = \frac{\overline{x^2}}{2V^2\tau} = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

V Vergrößerung des Mikroskops

τ zeitlicher Abstand der Messpunkte

$\overline{x^2}$ Mittelwert der Quadrate der Abstände der Messpunkte

η Viskosität des Wassers

r Radius der Latex-Kügelchen (verwendet wurde Lösung 2)

$$r = \frac{k_B T}{6\pi\eta D}$$

Messergebnisse:

Ermittelt wurden jeweils die Projektion der Abstände auf die willkürlich gewählten Achsen x und y von einem Messpunkt zum nächsten (kein festes Koordinatensystem) mit einem zeitlichen Abstand von $\tau = 10$ s. In der letzten Zeile sind die Mittelwerte der Quadrate der darüberstehenden Messwerte angegeben.

Teilchen 1		Teilchen 2		Teilchen 3		Teilchen 4		Teilchen 5	
x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm
0,2	-0,9	0,9	-0,4	-0,2	0,1	1,0	0,1	1,2	-0,2
-0,2	-0,2	0,5	-0,4	-0,2	-1,8	0,6	-0,9	0,1	-0,3
1,2	0,4	-0,6	-0,7	0,6	0,0	-0,3	-0,4	0,3	0,7
0,0	0,0	1,0	-0,8	-1,1	0,3	0,8	0,7	0,5	-0,2
-0,2	0,3	-0,6	0,1	0,4	-1,5	0,3	-0,3	0,7	0,9
0,0	-0,5	-0,2	-0,7	0,2	-0,5	0,5	-0,3	-1,0	-0,5
-1,6	0,2	0,5	0,0	0,2	0,5	-0,4	-0,8	1,2	0,7
-0,1	0,8	-1,1	0,0	0,0	0,0	0,1	-0,8	-0,5	0,0
0,7	-1,0	0,4	1,0	-0,5	0,0			1,2	-0,7
0,46	0,30	0,44	0,30	0,21	0,61	0,29	0,33	0,64	0,27

[cm²]

Teilchen 5		Teilchen 6		Teilchen 7		Teilchen 8		Teilchen 9		Teilchen 10	
x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm
1,2	-0,2	0,6	-1,1	0,5	-1,3	0,8	0,6	0,7	0,4	0,3	-0,1
0,1	-0,3	-0,4	0,9	0,9	0,2	0,0	0,2	-0,9	-0,1	-0,6	-0,6
0,3	0,7	0,1	0,6	-0,5	-1,0	1,1	-0,2	0,0	-0,7	0,1	0,1
0,5	-0,2	0,5	-0,7	-0,1	-0,7	-0,2	0,5	0,3	1,2	1,2	-0,8
0,7	0,9	0,2	0,4	1,1	0,3	-0,7	0,1	-1,0	0,1	-0,4	0,3
-1,0	-0,5	1,7	0,9	0,6	0,8	-0,8	0,0	-0,6	-0,1	1,4	-0,6
1,2	0,7	-0,4	0,6	0,8	-0,5	0,6	1,3	0,9	0,7	-0,1	0,3
-0,5	0,0	0,4	-0,6	0,6	-0,2	0,0	0,0	0,7	1,4	-0,7	0,2
1,2	-0,7	1,0	-0,5	-0,6	1,0	0,1	0,5	-0,4	-0,7	0,1	0,1
0,64	0,27	0,50	0,48	0,43	0,52	0,34	0,26	0,42	0,51	0,45	0,16

Aus den 20 Einzelwerten ergibt sich der Gesamtmittelwert zu $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 = 0,393 \text{ cm}^2$

Auswertung und Fehlerrechnung:

Zur Bestimmung der Vergrößerung wurde eine Strichplatte mit einem Strichabstand von 0,01 mm von Mikroskop auf dem Bildschirm abgebildet. Zur Erhöhung der Genauigkeit wurde der Abstand von 20,4 cm zwischen 11 Strichen mit einer Genauigkeit von 0,5 cm gemessen. Damit ergibt sich eine Vergrößerung $V=2040 \pm 50$.

Mit $x^2 = 0,393 \text{ cm}^2$ und $\tau = 10 \text{ s}$ folgt $D = 4,72 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ für die direkt aufeinanderfolgenden Messwerte

aller Teilchen. Der Fehler von \bar{x} kann aus der Statistik mit der Formel $\Delta \bar{x} = 2\sigma = 2\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$

bestimmt werden. Hier eine Übersicht

	2σ in cm	\bar{x}_i in cm
Teilchen 1	1,26	-0,06
Teilchen 2	1,24	-0,06
Teilchen 3	1,26	-0,19
Teilchen 4	1,14	-0,01
Teilchen 5	1,31	0,23
Teilchen 6	1,37	0,23
Teilchen 7	1,40	0,11
Teilchen 8	1,04	0,22
Teilchen 9	1,38	0,11
Teilchen 10	1,14	0,01

das ist die Formel für Δx , d.h. für die Standardabweichung des Einzelmesswertes – die Formel für die Standardabweichung des Mittelwertes lautet $\Delta \bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum (x_i - \bar{x})^2}$

Die Abweichung von diesem Wert ergibt sich mit $\Delta \tau = 0,5 \text{ s}$ als geschätzter Zeitfehler und

$$\Delta x^2 = \sum_j \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \Delta x_j \quad \text{mit } f = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 \quad \text{und } n=198$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i |2x_i| \Delta x \quad \text{mit } \Delta x = \sum_{i=1}^{10} \Delta x_i = 0,58 \text{ cm für alle Messpunkte}$$

$$= 0,228 \text{ cm}^2$$

zu

$$\sigma_{\bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i^2 - \bar{x}^2)^2}{10 \cdot (10-1)}} \quad \text{Fehler von } \bar{x}^2 \text{ für ein Teilchen}$$

$$\Delta D = \left| \frac{\partial D}{\partial V} \right| \Delta V + \left| \frac{\partial D}{\partial \bar{x^2}} \right| \Delta \bar{x^2} + \left| \frac{\partial D}{\partial \tau} \right| \Delta \tau$$

$$\Rightarrow \frac{2D\Delta V}{V} + \frac{\bar{x^2}}{2V^2\tau} + \frac{D\Delta \tau}{\tau}$$

$$= 1,29 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

Mit dem Diffusionskoeffizienten wurde der Radius der kugelförmigen Teilchen zu

$$r = \frac{kT}{D \cdot 6\pi \cdot \eta} = 4,715 \cdot 10^{-7} \text{ m berechnet.}$$

Wahrscheinlich liegt innerhalb der Fehlergrenzen

Der Fehler des Radius ergibt sich wie folgt aus der Abweichung des Diffusionskoeffizienten und dem Fehler der Temperatur, der mit $\Delta T = 0,5 \text{ K}$ angenommen wurde:

$$\Delta r = \left| \frac{\partial r}{\partial T} \right| \cdot \Delta T + \left| \frac{\partial r}{\partial D} \right| \cdot \Delta D = 8,308 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Die Theorie gibt eine von der Messzeit τ unabhängige Diffusionskonstante an. Um diese Konstanz zu überprüfen, berechneten wir

$$\tau' = 20 \text{ s}$$

a) die Diffusionskonstante für die Messzeit $2\tau = 20 \text{ s}$, indem wir je zwei Messpunkte zu einem Wert zusammengefasst. In der letzten Tabellenzeile ist jeweils die Summe der Quadrate der darüberstehenden Werte angegeben.

	Teilchen 1		Teilchen 2		Teilchen 3		Teilchen 4		Teilchen 5	
	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm
1->3	0,0	-1,1	1,4	-0,8	-0,4	-1,7	1,6	-0,8	1,3	-0,5
3->5	1,2	0,4	0,4	-1,5	-0,5	0,3	0,5	0,3	0,8	0,5
5->7	-0,2	-0,2	-0,8	-0,6	0,6	-2,0	0,8	-0,6	-0,3	0,4
7->9	-1,7	1,0	-0,6	0,0	0,2	0,5	-0,3	-1,6	0,7	0,7
	1,09	0,58	0,78	0,81	0,20	1,81	0,89	0,91	0,73	0,29

	Teilchen 6		Teilchen 7		Teilchen 8		Teilchen 9		Teilchen 10	
	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm
1->3	0,2	-0,2	1,4	-1,1	0,8	0,8	-0,2	0,3	-0,3	-0,7
3->5	0,6	-0,1	-0,6	-1,7	0,9	0,3	0,3	0,5	1,3	-0,7
5->7	1,9	1,3	1,7	1,1	-1,5	0,1	-1,6	0,0	1,0	-0,3
7->9	0,0	0,0	1,4	-0,7	0,6	1,3	1,6	2,1	-0,8	0,5
	1,00	0,44	1,79	1,45	1,02	0,61	1,31	1,19	0,86	0,33

Daraus berechnen sich $\bar{x^2} = 0,90 \text{ cm}^2$ und die Diffusionskonstante $D_2 = 5,43 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

$$\tau' = 30 \text{ s}$$

b) die Diffusionskonstante für die Messzeit $3\tau = 30 \text{ s}$, indem je drei Messpunkte zu einem Wert zusammengefasst werden. In der letzten Tabellenzeile ist jeweils die Summe der Quadrate der darüberstehenden Werte angegeben.

	Teilchen 1		Teilchen 2		Teilchen 3		Teilchen 4		Teilchen 5	
	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm
1->4	1,2	-0,7	0,8	-1,5	0,2	-1,7	1,3	-1,2	1,6	0,2
4->7	-0,2	-0,2	0,2	-1,4	-0,5	-1,7	1,6	0,1	0,2	0,2
7->10	-1,1	0,0	-0,2	1,0	-0,3	0,5	-0,3	-1,6	1,9	0,0
	0,65	0,13	0,18	1,30	0,10	1,51	1,09	1,00	1,55	0,02

	Teilchen 6		Teilchen 7		Teilchen 8		Teilchen 9		Teilchen 10	
	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm	x in cm	y in cm

1->4	0,3	0,4	0,9	-2,1	1,9	0,6	-0,2	-0,4	-0,2	-0,6
4->7	2,4	0,6	1,6	0,4	-1,7	0,6	-1,3	1,2	2,2	-1,1
7->10	1,0	-0,5	0,8	0,3	0,7	1,8	1,2	1,4	-0,7	0,6
	1,71	0,19	1,00	1,17	1,75	0,99	0,79	0,89	1,34	0,48

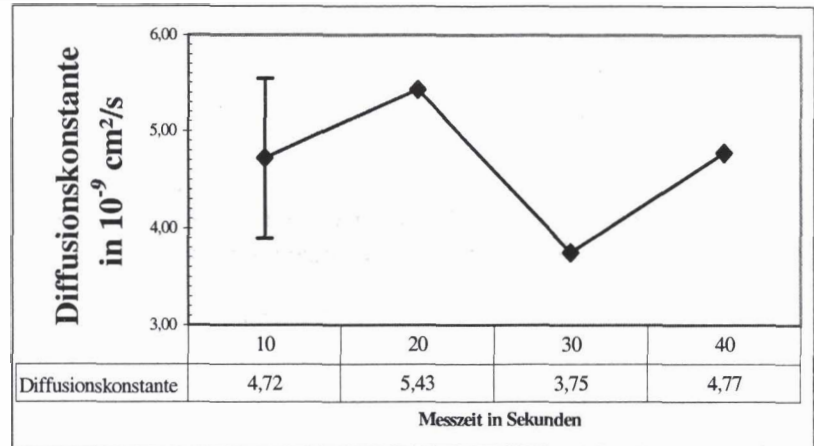
Daraus berechnen sich $\bar{x}^2 = 0,89 \text{ cm}^2$ und die Diffusionskonstante $D_3 = 3,75 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

$\tau = 40 \text{ s}$

c) für $4\tau = 40 \text{ s}$ ergibt sich analog

$\bar{x}^2 = 1,59 \text{ cm}^2$ und $D_4 = 4,77 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

Rechts ist eine grafische Darstellung der verschiedenen Diffusionskonstanten angegeben, wobei für $\tau = 5 \text{ s}$ auch der oben angegebene Fehler eingezeichnet ist. Trotz der starken Schwankung von ca. 10% zeigt eine Unabhängigkeit der beiden Größen.



Wurde gar nicht bestimmt, oder?

Diskussion:

Besonders zeitaufwändig war die Justierung des Mikroskops. Leider konnten wir nicht wie geplant die höchste verfügbare Vergrößerung benutzen, da der Lichtkegel des Dunkelfeldkondensors sich nicht auf die Mitte des aufgelösten Bereichs justieren ließ. Stattdessen wurde das Objektiv mit der 40-fachen Vergrößerung gewählt.

Weiterhin war die Latex-Kügelchen-Konzentration nicht groß genug, sodass in einigen Gebieten keine Kügelchen zu erkennen waren.

Messwerte: *Ergebnisse*

$$D = (4,72 \pm 1,29) \cdot 10^{-9} \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$r = (4,72 \pm 0,83) \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Die Ergebnisse unter a), b) und c) werden hier als Erg. für $\tau = 20, 30, 40 \text{ s}$ angegeben, in der vorherigen Version waren sie für $\tau = 10 \text{ s}$, $\tau = 15 \text{ s}$, und $\tau = 20 \text{ s}$ angegeben $\rightarrow ?$

M. Hille